Cours du 22.02.2021 MATIN
lundi, 22 février 2021 10:18

Organisation du semestre :
Chapitre 3: Géométrie Vectorielle

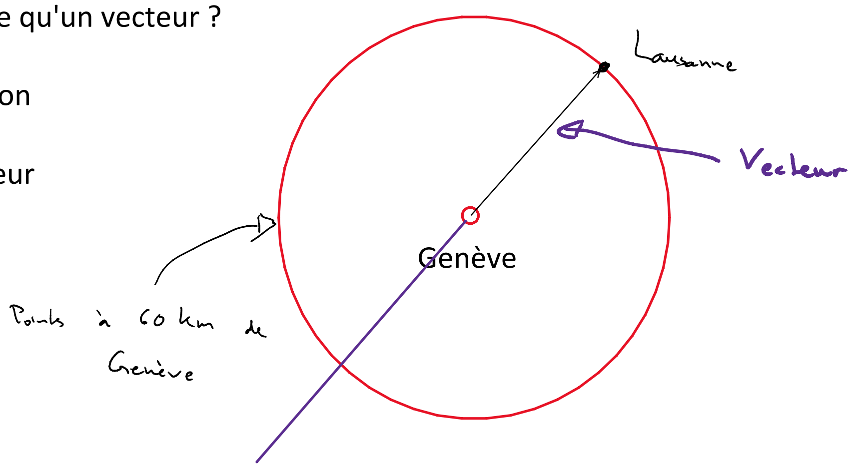
Examen écrit (date à convenir - d'ici la mi-semestre) 50% de la note

Chapitre 4 : Probabilités et Statistiques (TP avec oral/rapport) 50% de la note.

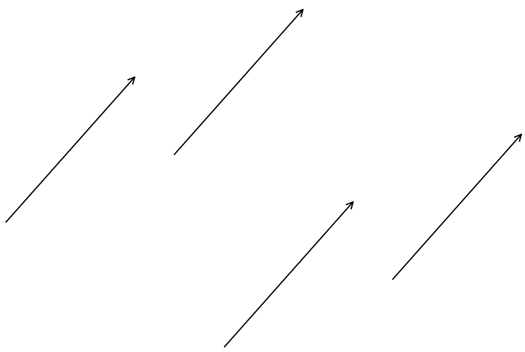
Chapitre 3: Géométrie Vectorielle

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

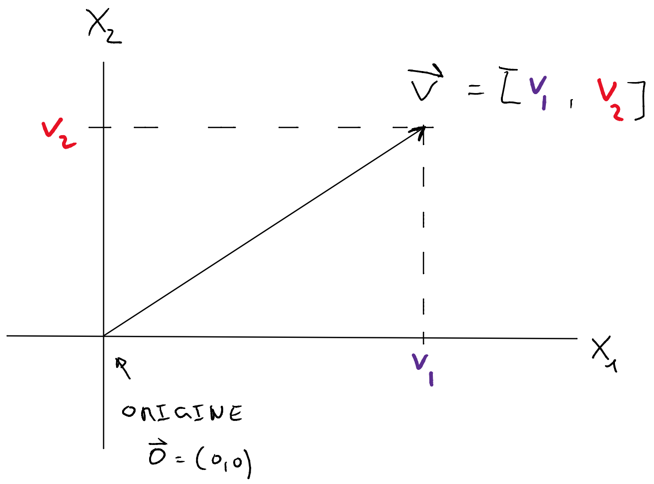
- Direction
- Sens
- Longueur



ATTENTION : la notion de vecteur ne dépend PAS de l'origine !!!



Tous ces vecteurs sont "EGAUX"
CAR ils ont les mêmes
SENS, DIRECTION et LONGEUR !!



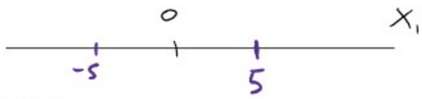
Notation : On note un **vecteur** à 2 dimensions comme $\vec{V} = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

Où $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ et on dit que $\vec{V} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Généralisation : $\vec{V} \in \mathbb{R}^N$ un vecteur de dimension $N \in \mathbb{N}^*$

$$\vec{V} = [v_1, v_2, \dots, v_N] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

~~Cas particuliers : un vecteur de dimension 1 est appelé un "***scalaire***".~~

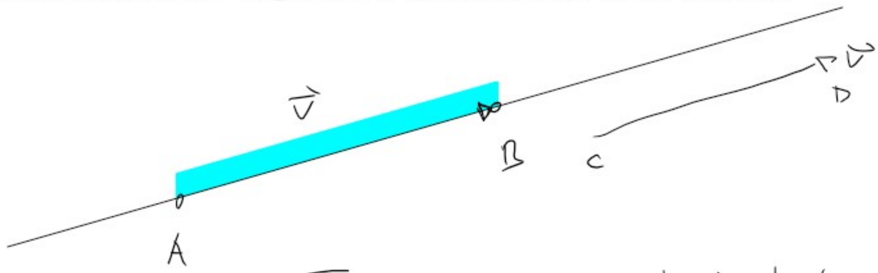


En fait, CHAQUE composante d'un vecteur à N dimensions est un ***SCALAIRE*** !

$$\underset{\text{vecteur}}{\vec{V}} = \begin{bmatrix} \boxed{v_1} \\ \boxed{v_2} \\ \vdots \\ \boxed{v_N} \end{bmatrix} \quad \text{Individuellement SCALAIRES } (\in \mathbb{R})$$

Pour les différencier un scalaire d'un vecteur, on écrira TOUJOURS un vecteur avec la flèche $\vec{V} \in \mathbb{R}^N$
et le scalaire sans flèche, souvent en utilisant une lettre grecque $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il y a une différence entre "segment de droite orienté" et un vecteur.



$\overline{AB}$ est un segment de droite orienté !

(va de A vers B)

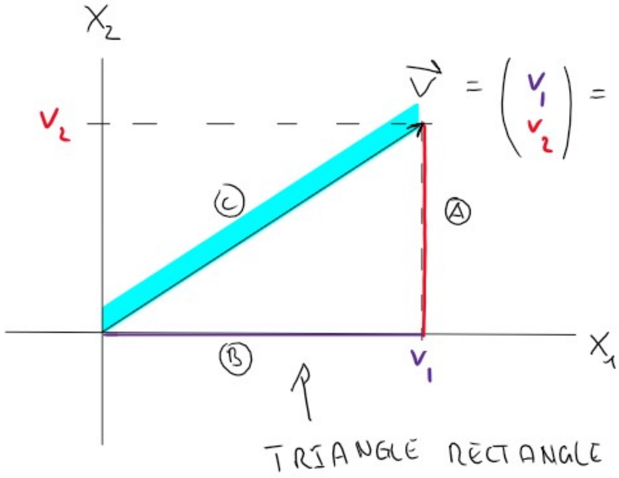
$\overline{AB} \neq \overline{BA}$!

Les deux points A et B définissent uniquement un (direction, sens ET la longueur).

La définition de "vecteur" englobe TOUS les segments de droite de même direction, sens et longueur au segment de droite $\overline{AB}$.

Le vecteur est UNIQUEMENT déterminé par
- Direction (droite)
- Sens
- Longueur, appelée aussi la **NORME** du vecteur, qui se note $\|\vec{V}\|$.

La norme d'un vecteur :
Comment la calcule-t-on ??? $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

PYTHAGORE : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Généralisation de la norme à N dimensions

$\vec{V} \in \mathbb{R}^N$ alors $\|\vec{V}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_N)^2}$

Proposition : (Exercice)
Prouvez que la norme d'un vecteur vaut 0 **SI ET SEULEMENT SI** le vecteur est le vecteur nul $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \Longleftrightarrow B$

Preuve $\Longleftrightarrow$: $A \Rightarrow B$

Et

$A \Leftarrow B$

PREUVE :

$A \Leftarrow B$: $\|\vec{O}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$ ✓

$A \Rightarrow B$ Si $\|\vec{X}\| = 0$, $\Rightarrow (\|\vec{X}\|)^2 = 0^2 = 0$

A

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$(x_1)^2 > 0$ si $x_1 \neq 0$

et $(x_1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$!

Tout nombre NON-NUL au carré est > 0

Idem pour x_2 : si $x_2 = 0 \Rightarrow (x_2)^2 = 0$

sinon $(x_2)^2 > 0$

Si $x_1 \neq 0$ <u>ou</u> $x_2 \neq 0$ on a que

$$\left(\|\vec{x}\|\right)^2 = \underbrace{(x_1)^2}_{\substack{>0 \text{ si} \\ x_1 \neq 0}} + \underbrace{(x_2)^2}_{\substack{>0 \\ \text{si } x_2 \neq 0}} > 0 \quad \text{si } x_1 \text{ ou } x_2 \neq 0 \, !$$

Par conséquent si $\left(\|\vec{x}\|\right)^2 = 0$ on a forcément $x_1 = x_2 = 0$!

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est le vecteur nul.

B

On a prouvé A $\Rightarrow$ B ✓

CQFD.